TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI

TRƯỜNG THPT CHUYÊN – ĐHSP

ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN V NĂM 2013

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (2,0 *điểm*)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1; 3)$ và có hệ số góc k. Tìm các giá trị của k để đường thẳng Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, D, E. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của (C) tại D và E. Chứng minh rằng các khoảng cách từ A đến d_1 và d_2 bằng nhau.

Câu 2. (1,0 *điểm*)

Giải phương trình: $\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x + 2\cos x} = \cot^2 x$.

Câu 3. (1,0 *điểm*)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy - 2 = 0 \\ y^3 + 3xy + 3 = 0 \end{cases}$.

Câu 4. (1,0 *điểm*)

Tìm tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x - \cos^3 x}}{\cos^5 x} dx$.

Câu 5. (1,0 điểm) Tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$; $\widehat{BAD} = 60^0$ và BCD là tam giác vuông tại D. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, BC.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn: $x + 2y = 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} \geq \dfrac{25}{1+48xy^2}$.

Câu 7. (1,0 *điểm*)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ với $A(0; 0)$ và $M(10; 5)$ là trung điểm của cạnh BC. Hãy viết phương trình dạng tổng quát các cạnh của hình vuông $ABCD$.

Câu 8. (1,0 *điểm*)

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; 2)$, mp(P): $x + y + z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho đường thẳng AM vuông góc với đường Δ và khoảng cách từ M đến Δ bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 9. (1,0 *điểm*) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1. $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$.
2. Số $\left|z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i\right)\right|$ lớn nhất.

………………………………..Hết…………………………………..

ĐÁP ÁN − THANG ĐIỂM

THI THỬ ĐH LẦN V - NĂM 2013

Câu	ĐÁP ÁN	
	1. (*1,0 điểm*). *Học sinh tự giải.*	***1,00***
	2. (*1,0 điểm*) *Chứng minh. …*	
	Đường thẳng Δ : $y = k(x+1)+3$ cắt (*C*) tại 3 điểm phân biệt ⇔ pt sau có 3 nghiệm phân biệt : $x^3+3x^2+1 = k(x+1)+3 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-k-2) = 0.$ Để pt trên có 3 nghiệm phân biệt thì pt $x^2+2x-k-2=0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = 1+k+2>0\\ 1-2-k-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow k > -3.$	***0,50***
I ***(2 điểm)***	Gọi *D*(x_D; y_D) , *E*(x_E; y_E) khi đó x_D, x_E là nghiệm của (*). Theo hệ thức Viet ta có $x_D + x_E = -2$. Hệ số góc của các tiếp tuyến tại *D* và *E* là $k_1 = y'(x_D) = 3x_D^2+6x_D$, $k_2 = y'(x_E) = 3x_E^2+6x_E$. Do x_D, x_E là nghiệm của (*) nên $3x_D^2+6x_D = 3(k+2) = 3x_E^2+6x_E$. Suy ra các tiếp tuyến tại *D* và *E* của (*C*) có cung hệ số góc. Mặt khác $x_D + x_E = -2 = 2x_A$ và 3 điểm *A*, *D*, *E* thẳng hàng nên *A* là trung điểm của *DE*. Suy ra d(*A*, d_1) = d(*A*, d_2) (đpcm)	***0,50***
	1. (*1,0 điểm*) . *Giải phương trình …*	
	Điều kiện : $\sin x \neq 0$, $\cos 3x + 2\cos x \neq 0$. Pt $\Leftrightarrow \frac{3\sin x-4\sin^3 x}{4\cos^3 x-\cos x} = \cot^2 x \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{\sin^2 x}-4}{4\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}-\frac{\cos x}{\sin^3 x}} = \cot^2 x \Leftrightarrow \frac{3(1+\cot^2 x)-4}{4\cot^3 x-\cot x(1+\cot^2 x)} = \cot^2 x$	***0,50***
II ***(1 điểm)***	$\Leftrightarrow \frac{3\cot^2 x-1}{3\cot^3 x-\cot x} = \cot^2 x \Leftrightarrow \frac{1}{\cot x} = \cot^2 x \Leftrightarrow \cot^3 x = 1$ $\Leftrightarrow \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in Z$. Kiểm tra điều kiện ta thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in Z$.	***0,50***
	1. (*1,0 điểm*) . *Giải hệ phương trình ……………..…*	
III ***(1 điểm)***	Từ pt $x^3+xy-2=0$ suy ra $x \neq 0$ và $y = \frac{2-x^3}{x}$, thay vào pt thứ hai ta được $\left(\frac{2-x^3}{x}\right)^3 + 3(2-x^3)+3 = 0$ Đặt $t = x^3 \neq 0$, phương trình trên trở thành $t^3-3t^2+3t-8=0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 7 \Leftrightarrow t = 1+\sqrt[3]{7}$ Từ đó ta có : $x = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{7}}$ và $y = \frac{1-\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{7}}}$	***1,00***
	(*1,0 điểm*). *Tính tích phân ………………..*	
I V ***(1 điểm)***	Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\sqrt[3]{\frac{\cos x-\cos^3 x}{\cos^3 x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x}-1}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{\cos^4 x}.dx$ Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1+\tan^2 x)dx \Rightarrow \frac{1}{1+t^2}dt = dx$ Với $x = 0$ thì $t = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$. Ta có $\frac{1}{\cos^4 x} = (1+\tan^2 x)^2 = (1+t^2)^2$	***0,50***
	Suy ra $I = \int_0^1 (1+t^2)\sqrt[3]{t^2}dt = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}.dt + \int_0^1 t^{\frac{8}{3}}.dt = \frac{3}{5}.t^{\frac{5}{3}}\Big\vert_0^1 + \frac{3}{11}.t^{\frac{11}{3}}\Big\vert_0^1 = \frac{3}{5}+\frac{3}{11} = \frac{48}{55}$. Vậy $I = \frac{48}{55}$.	***0,50***

V (1 điểm)

(1,0 điểm). *Tính thể tích và khoảng cách………*

Trong ΔABC cân tại A kẻ $AH \perp BC \Rightarrow \Delta ABH$ vuông tại H có AB = a,

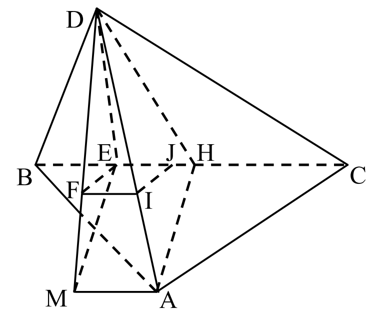
$\widehat{BAH} = 60^o \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$ và $HB = HC = HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔBCD vuông).

Ta có : $HA^2 + HD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 = AD^2$

$\Rightarrow AH \perp HD$ do đó $AH \perp (BCD)$. ΔABD cân có $\widehat{BAD} = 60^o$ nên

ΔABD đều $\Rightarrow BD$ = a và $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}.a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).



0,50

Ta sẽ tạo ra mặt phẳng chứa AD song song với BC.

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BC. Trong mp(BCD) kẻ $DE \perp BC$, trong mp(ABC) qua E kẻ đường thẳng song song với AH cắt d tại M, khi đó $BC//(ADM)$ và $BC \perp (DEM)$.

Trong ΔDEM kẻ $EF \perp DM$ thì độ dài EF bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC.

Do $AH \perp (BCD)$ nên $(BCD) \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp ME$.

Trong ΔDEM vuông tại E có EF là đường cao, ta có $\frac{1}{EF^2} = \frac{1}{ED^2} + \frac{1}{EM^2}$ (*).

Ta có $EM = AH = \frac{a}{2}$, $S_{BCD} = BC.DE = DB.DC \Rightarrow DE = \frac{DB.DC}{BC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đó từ (*) ta có $\frac{1}{EF^2} = \frac{3}{2a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

0,50

VI (1 điểm)

1. *(1,0 điểm).* *Chứng minh rằng ………………*

Từ giả thiết x, y > 0 và x + 2y = 1 ⇒ x = 1 – 2y và $0 < y < \frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức trở thành : $\frac{1}{1-2y} + \frac{2}{y} \geq \frac{25}{1+48y^2(1-2y)}$

$\Leftrightarrow (2-3y)[1+48y^2(1-2y)] \geq 25y(1-2y) \Leftrightarrow (2-3y)(1+48y^2-96y^3) - 25y(1-2y) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 - 28y + 146y^2 - 336y^3 + 288y^4 \geq 0 \Leftrightarrow 144y^4 - 168y^3 + 73y^2 - 14y + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (12y^2 - 7y + 1)^2 \geq 0$. (đpcm).

1,00

VII (1 điểm)

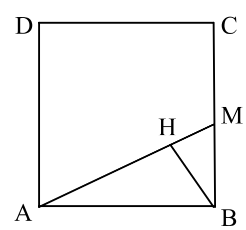
(1,0 điểm). *Viết phương trình các cạnh ……*

Gọi độ dài cạnh hình vuông là 2a, khi đó $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 5a^2$, mà $AM^2 = 125 \Rightarrow a = 5$.

Kẻ $BH \perp AM \Rightarrow MH = \frac{MB^2}{MA} = \sqrt{5}$. Gọi H(x; y), do $\overrightarrow{MH}$ và $\overrightarrow{MA}$ cùng hướng và

$\frac{MH}{MA} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-10) = -10 \\ 5(y-5) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow H : \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$

Điểm B là giao của đường thẳng qua H vuông góc với AM và đường tròn đường kính AM.



0,50

Ta có $\overrightarrow{AM}$(10; 5).

Phương trình đường thẳng BH : 2x + y – 20 = 0

Phương trình đường tròn đường kính AM : $(x-5)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{125}{4}$.

Gọi B(t; 20 – 2t) $\Rightarrow (t-5)^2 + (\frac{35}{2} - 2t)^2 = \frac{125}{4} \Leftrightarrow t^2 - 16t + 60 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = 6 \end{array}\right.$

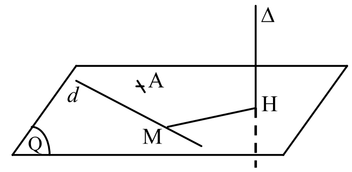
Với t = 10. Ta có B(10; 0) ⇒ C(10; 10). Khi đó phương trình các cạnh của hình vuông $ABCD$ là :

AB : y = 0, BC : x = 10, CD : y = 10 và AD : x = 0.

Với t = 6. Ta có B(6; 8) ⇒ C(14; 2) . Khi đó phương trình các cạnh của hình vuông $ABCD$ là :

AB : 4x – 3y = 0, BC : 3x + 4y – 50 = 0, CD : 4x – 3y – 50 = 0, AD : 3x + 4y = 0.

0,50

***VIII* (*1 điểm*)**	**(*1,0 điểm*).** *Tìm tọa độ điểm………………*	
	Đường thẳng *AM* thuộc mặt phẳng (*Q*) vuông góc với Δ. Phương trình (*Q*) : $x + y - z = 0$. Giao điểm của (*Q*) với Δ là điểm *H*(2; –1; 1). Giao tuyến *d* của (*P*) và (*Q*) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ cùng phương với véc tơ $[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\right) = (-2; 2; 0)$. Chọn $\overrightarrow{u_d} = (1; -1; 0)$.	***0,50***
	Điểm *N*(0; 1; 1) ∈ *d*, suy ra phương trình của *d* : $\begin{cases} x = t\\ y = 1 - t\\ z = 1\end{cases} \Rightarrow M(t; 1-t; 1)$. Ta có $d(M,\Delta) = MH = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (2-t)^2 + (2-t)^2 = 18 \Leftrightarrow t = 5$ hoặc $t = -1$. Vậy có hai điểm thỏa mãn bài toán : $M_1(5; -4; 1)$ và $M_2(-1; 2; 1)$.  	***0,50***
***IX* (*1 điểm*)**	**(*1,0 điểm*).** *Tìm số phức …………………*	
	Giả sử $z = x + yi$; $x, y \in R$. Ta có $\lvert z-2\rvert^2 + \lvert z+2\rvert^2 = 26 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + y^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện 1. là đường tròn (*S*) tâm là gốc tọa độ O, bán kính R = 3. Ta có $\left\lvert z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)\right\rvert = \sqrt{\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$.	***0,50***
	Vì $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9$ nên điểm $K\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ thuộc đường tròn (*S*). Gọi *M*(x; y) là điểm thuộc (*S*), khi đó $\left\lvert z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)\right\rvert = \sqrt{\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = MK$. Suy ra $\left\lvert z - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)\right\rvert$ lớn nhất ⇔ *MK* lớn nhất ⇔ *MK* là đường kính của (*S*) ⇔ $M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Vậy $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.	***0,50***